Análisis Matemático I
Espacios métricos y espacios normados

Javier Pérez González

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

September 1, 2012

Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se define su producto escalar por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Este producto escalar se llama *producto escalar euclídeo*.

Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se define su producto escalar por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Este producto escalar se llama *producto escalar euclídeo*.

Propiedades del producto escalar.

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, y $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define su producto escalar por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Este producto escalar se llama *producto escalar euclídeo*.

Propiedades del producto escalar.

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, y $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Simetría*. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define su producto escalar por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Este producto escalar se llama *producto escalar euclídeo*.

Propiedades del producto escalar.

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, y $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Simetría*. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Linealidad*. $\langle \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define su producto escalar por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Este producto escalar se llama *producto escalar euclídeo*.

Propiedades del producto escalar.

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, y $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Simetría*. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Linealidad*. $\langle \alpha\, \mathbf{x} + \beta\, \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se define su producto escalar por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Este producto escalar se llama *producto escalar euclídeo*.

Propiedades del producto escalar.

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, y $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Simetría*. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Linealidad*. $\langle \alpha\, \mathbf{x} + \beta\, \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

La *norma euclídea* de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se define por

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *se verifica que*

$$\left|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle\right| \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

Además, supuesto que $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *no son nulos, la igualdad* $\left|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle\right| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$ *equivale a que exista un número* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ *(es decir, los vectores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *están en una misma recta que pasa por el origen)*.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Para todos $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\left|\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle\right| \leqslant \|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2$$

Además, supuesto que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ no son nulos, la igualdad $\left|\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle\right| = \|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2$ equivale a que exista un número $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$ (es decir, los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en una misma recta que pasa por el origen).

Propiedades de la norma euclídea.

- $\|\mathbf{x}\|_2 \geqslant 0$, y $\|\mathbf{x}\|_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *se verifica que*

$$\left|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle\right| \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

Además, supuesto que $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *no son nulos, la igualdad* $\left|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle\right| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$ *equivale a que exista un número* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ *(es decir, los vectores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *están en una misma recta que pasa por el origen)*.

Propiedades de la norma euclídea.

- $\|\mathbf{x}\|_2 \geqslant 0$, y $\|\mathbf{x}\|_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Homogeneidad*. $\|\lambda \mathbf{x}\|_2 = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|_2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *se verifica que*

$$\left|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle\right| \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

Además, supuesto que $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *no son nulos, la igualdad* $\left|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle\right| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$ *equivale a que exista un número* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ *(es decir, los vectores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *están en una misma recta que pasa por el origen)*.

Propiedades de la norma euclídea.

- $\|\mathbf{x}\|_2 \geqslant 0$, y $\|\mathbf{x}\|_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Homogeneidad*. $\|\lambda \mathbf{x}\|_2 = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|_2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* Se verifica que

  $$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

  Además, supuesto que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ no son nulos, la igualdad $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2$ equivale a que exista un número $\lambda > 0$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ (es decir, los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en una misma semirrecta que pasa por el origen).

Se dice que los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son **ortogonales**, y escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, cuando su producto escalar es cero.

Se dice que los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son **ortogonales**, y escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, cuando su producto escalar es cero.
Se dice que un vector $\mathbf{x}$ es ortogonal a un conjunto de vectores $E \subset \mathbb{R}^n$ cuando $\mathbf{x}$ es ortogonal a todo vector en E.

Se dice que los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son **ortogonales**, y escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, cuando su producto escalar es cero.
Se dice que un vector $\mathbf{x}$ es ortogonal a un conjunto de vectores $E \subset \mathbb{R}^n$ cuando $\mathbf{x}$ es ortogonal a todo vector en E.

Un conjunto de vectores no nulos que son mutuamente ortogonales se dice que es un **conjunto ortogonal** de vectores; si, además, los vectores tienen todos norma 1 se dice que es un **conjunto ortonormal** de vectores.

Se dice que los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son **ortogonales**, y escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, cuando su producto escalar es cero.
Se dice que un vector $\mathbf{x}$ es ortogonal a un conjunto de vectores $E \subset \mathbb{R}^n$ cuando $\mathbf{x}$ es ortogonal a todo vector en E.

Un conjunto de vectores no nulos que son mutuamente ortogonales se dice que es un **conjunto ortogonal** de vectores; si, además, los vectores tienen todos norma 1 se dice que es un **conjunto ortonormal** de vectores.

Una base vectorial que también es un conjunto ortogonal (ortonormal) se llama una **base ortogonal** (ortonormal).

Se dice que los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son **ortogonales**, y escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, cuando su producto escalar es cero.
Se dice que un vector $\mathbf{x}$ es ortogonal a un conjunto de vectores $E \subset \mathbb{R}^n$ cuando $\mathbf{x}$ es ortogonal a todo vector en E.

Un conjunto de vectores no nulos que son mutuamente ortogonales se dice que es un **conjunto ortogonal** de vectores; si, además, los vectores tienen todos norma 1 se dice que es un **conjunto ortonormal** de vectores.

Una base vectorial que también es un conjunto ortogonal (ortonormal) se llama una **base ortogonal** (ortonormal).

Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores no nulos, el vector

$$\prod_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle}\mathbf{y}$$

se llama **proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$**.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+_o$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+_o$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+_o$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\, \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\mathrm{o}}^{+}$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y},\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\,\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mathrm{d}_2(\mathbf{z},\mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y},\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\,\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mathrm{d}_2(\mathbf{z},\mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\mathrm{o}}^+$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\, \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathrm{d}_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Sea X un espacio vectorial real. Una norma sobre X es una aplicación $\|\ \| : X \to \mathbb{R}_{\mathrm{o}}^+$ que verifica las siguientes propiedades:

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda| \, \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathrm{d}_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Sea X un espacio vectorial real. Una norma sobre X es una aplicación $\| \; \| : X \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y},\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\,\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \mathrm{d}_2(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mathrm{d}_2(\mathbf{z},\mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Sea X un espacio vectorial real. Una norma sobre X es una aplicación $\|\ \| : X \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Homogeneidad*. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\; \forall \mathbf{x} \in X$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\, \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \;\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathrm{d}_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Sea X un espacio vectorial real. Una norma sobre X es una aplicación $\|\;\| : X \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Homogeneidad*. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\, \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\forall \mathbf{x} \in X$.
- *Desigualdad triangular*. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+_o$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda| \, \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \;\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathrm{d}_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Sea X un espacio vectorial real. Una norma sobre X es una aplicación $\| \; \| : X \to \mathbb{R}^+_o$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Homogeneidad*. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\forall \mathbf{x} \in X$.
- *Desigualdad triangular*. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

La *distancia euclídea* en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\mathrm{d}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La distancia euclídea entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ es el número $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Propiedades de la distancia euclídea.

- $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, y $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- *Homogeneidad*. $\mathrm{d}_2(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\, \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- *Desigualdad triangular.* $\mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mathrm{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathrm{d}_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Sea X un espacio vectorial real. Una norma sobre X es una aplicación $\|\ \| : X \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- *Homogeneidad*. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\, \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall \mathbf{x} \in X$.
- *Desigualdad triangular*. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \;\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

El par ordenado $(X, \|\ \|)$ se llama un *espacio normado*.

Ejemplos de espacios normados

En $\mathbb{R}^n$ suelen considerarse, además de la norma euclídea, la *norma de la suma*, $\| \ \|_1$, y la *norma del máximo*, $\| \ \|_\infty$, definidas para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ por:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| , \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_k| : 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

Ejemplos de espacios normados

En $\mathbb{R}^n$ suelen considerarse, además de la norma euclídea, la *norma de la suma*, $\| \ \|_1$, y la *norma del máximo*, $\| \ \|_\infty$, definidas para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ por:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| , \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_k| : 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

En el espacio vectorial, $\mathcal{B}(A)$, de todas las funciones reales acotadas definidas en un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, se define la *norma uniforme* dada para toda $f \in \mathcal{B}(A)$ por:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in A\} .$$

Ejemplos de espacios normados

En $\mathbb{R}^n$ suelen considerarse, además de la norma euclídea, la *norma de la suma*, $\| \ \|_1$, y la *norma del máximo*, $\| \ \|_\infty$, definidas para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ por:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| , \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_k| : 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

En el espacio vectorial, $\mathcal{B}(A)$, de todas las funciones reales acotadas definidas en un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, se define la *norma uniforme* dada para toda $f \in \mathcal{B}(A)$ por:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in A\} .$$

En el espacio vectorial, $\mathcal{C}([a, b])$, de todas las funciones reales continuas definidas en un intervalo $[a, b]$, se define la *norma integral de orden 1* dada para todo $f \in \mathcal{C}([a, b])$ por:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \,\mathrm{d}t$$

Sea E un conjunto cualquiera no vacío. Una *distancia* en E es una aplicación $\mathrm{d}: E \times E \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

Sea E un conjunto cualquiera no vacío. Una *distancia* en E es una aplicación $\mathrm{d}: E \times E \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$.
- *Simetría*. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x) \quad \forall x, y \in E$.

Sea E un conjunto cualquiera no vacío. Una *distancia* en E es una aplicación $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
- *Simetría*. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x) \quad \forall x, y \in E$.
- *Desigualdad triangular*. $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$ para todos $x, y, z \in E$.

Sea E un conjunto cualquiera no vacío. Una *distancia* en E es una aplicación $\mathrm{d}: E \times E \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
- *Simetría*. $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x) \quad \forall x, y \in E$.
- *Desigualdad triangular*. $\mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$ para todos $x, y, z \in E$.

Sea E un conjunto cualquiera no vacío. Una *distancia* en E es una aplicación $\mathrm{d}: E \times E \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
- *Simetría*. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x) \quad \forall x, y \in E$.
- *Desigualdad triangular*. $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$ para todos $x, y, z \in E$.

El par ordenado (E, d) se llama un *espacio métrico*. Los elementos de un espacio métrico suelen llamarse *puntos* de dicho espacio métrico.

Sea E un conjunto cualquiera no vacío. Una *distancia* en E es una aplicación $\mathrm{d}: E \times E \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
- *Simetría*. $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x) \quad \forall x,y \in E$.
- *Desigualdad triangular*. $\mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$ para todos $x,y,z \in E$.

El par ordenado (E,d) se llama un *espacio métrico*. Los elementos de un espacio métrico suelen llamarse *puntos* de dicho espacio métrico.

Dado un espacio normado, $(X,\|\ \|)$, la aplicación $\mathrm{d}: X \times X \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in X$$

es una distancia en X que se llama *distancia asociada a la norma*.

Sea E un conjunto cualquiera no vacío. Una *distancia* en E es una aplicación $\mathrm{d}: E \times E \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
- *Simetría*. $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x) \quad \forall x, y \in E$.
- *Desigualdad triangular*. $\mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$ para todos $x, y, z \in E$.

El par ordenado (E, d) se llama un *espacio métrico*. Los elementos de un espacio métrico suelen llamarse *puntos* de dicho espacio métrico.

Dado un espacio normado, $(X, \| \|)$, la aplicación $\mathrm{d}: X \times X \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$$

es una distancia en X que se llama *distancia asociada a la norma*.

Todo espacio normado se considera siempre como espacio métrico con la distancia asociada a su norma.

Topología de un espacio métrico

Sea (E, d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a, r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x, a) < r\}$$

Topología de un espacio métrico

Sea (E, d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a, r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x, a) < r\}$$

Se dice que un conjunto $A \subset E$ es *abierto* en el espacio métrico (E, d) si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

Topología de un espacio métrico

Sea (E, d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a, r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x, a) < r\}$$

Se dice que un conjunto $A \subset E$ es *abierto* en el espacio métrico (E, d) si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

$B(a, r)$ es abierto y se llama *bola abierta* de centro a y radio r.

Topología de un espacio métrico

Sea (E,d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a,r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x,a) < r\}$$

Se dice que un conjunto $A \subset E$ es *abierto* en el espacio métrico (E,d) si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x,r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

$B(a,r)$ es abierto y se llama *bola abierta* de centro a y radio r.

Propiedades de los conjuntos abiertos de un espacio métrico. En todo espacio métrico (E,d) se verifica que:

Topología de un espacio métrico

Sea (E, d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a, r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x, a) < r\}$$

Se dice que un conjunto $A \subset E$ es *abierto* en el espacio métrico (E, d) si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

$B(a, r)$ es abierto y se llama *bola abierta* de centro a y radio r.

Propiedades de los conjuntos abiertos de un espacio métrico. En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son abiertos.

Topología de un espacio métrico

Sea (E,d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a,r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x,a) < r\}$$

Se dice que un conjunto $A \subset E$ es *abierto* en el espacio métrico (E,d) si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x,r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

$B(a,r)$ es abierto y se llama *bola abierta* de centro a y radio r.

Propiedades de los conjuntos abiertos de un espacio métrico. En todo espacio métrico (E,d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son abiertos.
- La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Topología de un espacio métrico

Sea (E, d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a, r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x, a) < r\}$$

Se dice que un conjunto $A \subset E$ es *abierto* en el espacio métrico (E, d) si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

$B(a, r)$ es abierto y se llama *bola abierta* de centro a y radio r.

Propiedades de los conjuntos abiertos de un espacio métrico. En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son abiertos.
- La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Topología de un espacio métrico

Sea (E, d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a, r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x, a) < r\}$$

Se dice que un conjunto $A \subset E$ es *abierto* en el espacio métrico (E, d) si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

$B(a, r)$ es abierto y se llama *bola abierta* de centro a y radio r.

Propiedades de los conjuntos abiertos de un espacio métrico. En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son abiertos.
- La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Topología de un espacio métrico

Sea (E, d) un espacio métrico. Dados un punto $a \in E$ y un número $r > 0$ definimos:

$$B(a, r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x, a) < r\}$$

Se dice que un conjunto $A \subset E$ es *abierto* en el espacio métrico (E, d) si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

$B(a, r)$ es abierto y se llama *bola abierta* de centro a y radio r.

Propiedades de los conjuntos abiertos de un espacio métrico. En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son abiertos.
- La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Las propiedades anteriores se expresan diciendo que si $\mathcal{T}$ es la clase de todos los conjuntos abiertos de un espacio métrico (E, d), entonces $\mathcal{T}$ es una *topología* en E. Se dice que dicha topología está asociada a la distancia d.

Se dice que un conjunto $F \subset E$ es *cerrado* en el espacio métrico (E, d) si su complementario $E \backslash F$ es abierto en dicho espacio métrico.

Se dice que un conjunto $F \subset E$ es *cerrado* en el espacio métrico (E, d) si su complementario $E \setminus F$ es abierto en dicho espacio métrico.

Propiedades de los conjuntos cerrados de un espacio métrico.
En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

Se dice que un conjunto $F \subset E$ es *cerrado* en el espacio métrico (E, d) si su complementario $E \backslash F$ es abierto en dicho espacio métrico.

Propiedades de los conjuntos cerrados de un espacio métrico.
En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son cerrados.

Se dice que un conjunto $F \subset E$ es *cerrado* en el espacio métrico (E, d) si su complementario $E \backslash F$ es abierto en dicho espacio métrico.

Propiedades de los conjuntos cerrados de un espacio métrico.
En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son cerrados.
- La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Se dice que un conjunto $F \subset E$ es *cerrado* en el espacio métrico (E, d) si su complementario $E \setminus F$ es abierto en dicho espacio métrico.

Propiedades de los conjuntos cerrados de un espacio métrico.
En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son cerrados.
- La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Se dice que un conjunto $F \subset E$ es *cerrado* en el espacio métrico (E, d) si su complementario $E \setminus F$ es abierto en dicho espacio métrico.

Propiedades de los conjuntos cerrados de un espacio métrico.
En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son cerrados.
- La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Se dice que un conjunto $F \subset E$ es *cerrado* en el espacio métrico (E, d) si su complementario $E \setminus F$ es abierto en dicho espacio métrico.

Propiedades de los conjuntos cerrados de un espacio métrico.
En todo espacio métrico (E, d) se verifica que:

- Los conjuntos E y Ø son cerrados.
- La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Sean (E, d) un espacio métrico, $a \in E$ y $r \geqslant 0$. Se verifica que el conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E : \mathrm{d}(x, a) \leqslant r\}$$

es cerrado. Dicho conjunto se llama *bola cerrada* de centro a radio r.

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$.

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$.
Decimos que un punto $x \in E$ es **adherente** al conjunto A si toda bola abierta centrada en x tiene puntos de A. El conjunto de todos los puntos adherentes a A se llama la **adherencia** de A y se representa por $\overline{A}$.

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$.
Decimos que un punto $x \in E$ es **adherente** al conjunto A si toda bola abierta centrada en x tiene puntos de A. El conjunto de todos los puntos adherentes a A se llama la **adherencia** de A y se representa por $\overline{A}$.

Decimos que un punto $x \in E$ es un punto de **acumulación** del conjunto A si toda bola abierta centrada en x tiene puntos de A *distintos* de x. El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se llama la **acumulación** de A y se representa por A'.

El conjunto de todos los puntos adherentes a A y a E/A se llama la **frontera** de A y se representa por $\mathrm{Fr}(A)$.

El conjunto de todos los puntos adherentes a A y a E/A se llama la **frontera** de A y se representa por $\mathrm{Fr}(A)$.

Decimos que un punto $x \in A$ es un punto **interior** al conjunto A si hay alguna bola abierta centrada en x contenida en A. El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el **interior** de A y se representa por $\overset{\circ}{A}$.

El conjunto de todos los puntos adherentes a A y a E/A se llama la **frontera** de A y se representa por $\operatorname{Fr}(A)$.

Decimos que un punto $x \in A$ es un punto **interior** al conjunto A si hay alguna bola abierta centrada en x contenida en A. El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el **interior** de A y se representa por $\overset{\circ}{A}$.

Decimos que un punto $x \in A$ es un punto **aislado** en A si hay alguna bola abierta $B(x,r)$ tal que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

Conceptos topológicos

Conceptos topológicos

Se dice que dos distancias d y ρ sobre un mismo conjunto E son *equivalentes* si ambas definen la misma topología en E.

Conceptos topológicos

Se dice que dos distancias d y ρ sobre un mismo conjunto E son *equivalentes* si ambas definen la misma topología en E.

Se dice que dos normas sobre un mismo espacio vectorial son equivalentes si sus distancias asociadas son equivalentes.

Conceptos topológicos

Se dice que dos distancias d y ρ sobre un mismo conjunto E son *equivalentes* si ambas definen la misma topología en E.

Se dice que dos normas sobre un mismo espacio vectorial son equivalentes si sus distancias asociadas son equivalentes.

Sean $\| \ \|$ y $|||\ |||$ dos normas sobre un espacio vectorial X. Equivalen las afirmaciones:

Conceptos topológicos

Se dice que dos distancias d y ρ sobre un mismo conjunto E son *equivalentes* si ambas definen la misma topología en E.

Se dice que dos normas sobre un mismo espacio vectorial son equivalentes si sus distancias asociadas son equivalentes.

Sean $\|\ \|$ y $|||\ |||$ dos normas sobre un espacio vectorial X. Equivalen las afirmaciones:
a) $\|\ \|$ y $|||\ |||$ son normas equivalentes.

Conceptos topológicos

Se dice que dos distancias d y ρ sobre un mismo conjunto E son *equivalentes* si ambas definen la misma topología en E.

Se dice que dos normas sobre un mismo espacio vectorial son equivalentes si sus distancias asociadas son equivalentes.

Sean $\|\ \|$ y $|||\ |||$ dos normas sobre un espacio vectorial X. Equivalen las afirmaciones:
a) $\|\ \|$ y $|||\ |||$ son normas equivalentes.
b) Existen números $m > 0$, $M > 0$ verificándose que:

$$m\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in X$$

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) es **convergente** si hay un elemento $x \in E$ tal que $\{\mathrm{d}(x_n, x)\} \to 0$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) es **convergente** si hay un elemento $x \in E$ tal que $\{\mathrm{d}(x_n, x)\} \to 0$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon$.

Es fácil comprobar que si hay algún elemento $x \in E$ que verifica la condición de convergencia anterior dicho elemento x es único. Tal elemento se llama *límite* de la sucesión $\{x_n\}$ y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\{x_n\} \to x$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) es **convergente** si hay un elemento $x \in E$ tal que $\{\mathrm{d}(x_n, x)\} \to 0$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon$.

Es fácil comprobar que si hay algún elemento $x \in E$ que verifica la condición de convergencia anterior dicho elemento x es único. Tal elemento se llama *límite* de la sucesión $\{x_n\}$ y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\{x_n\} \to x$.

Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) es **convergente** si hay un elemento $x \in E$ tal que $\{\mathrm{d}(x_n, x)\} \to 0$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon$.

Es fácil comprobar que si hay algún elemento $x \in E$ que verifica la condición de convergencia anterior dicho elemento x es único. Tal elemento se llama *límite* de la sucesión $\{x_n\}$ y escribimos $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\{x_n\} \to x$.

Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Equivalen las siguientes afirmaciones:
a) x es un punto adherente a A.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) es **convergente** si hay un elemento $x \in E$ tal que $\{\mathrm{d}(x_n, x)\} \to 0$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon$.

Es fácil comprobar que si hay algún elemento $x \in E$ que verifica la condición de convergencia anterior dicho elemento x es único. Tal elemento se llama *límite* de la sucesión $\{x_n\}$ y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\{x_n\} \to x$.

Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Equivalen las siguientes afirmaciones:
a) x es un punto adherente a A.
b) x es límite de una sucesión de puntos de A.

Sucesión de Cauchy. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) cumple la condición de Cauchy o que es una sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Sucesión de Cauchy. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) cumple la condición de Cauchy o que es una sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Se dice que (E, d) es un espacio métrico *completo* si toda sucesión de puntos de E que verifica la condición de Cauchy es convergente.

Sucesión de Cauchy. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) cumple la condición de Cauchy o que es una sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Se dice que (E, d) es un espacio métrico *completo* si toda sucesión de puntos de E que verifica la condición de Cauchy es convergente.

Un espacio normado que es completo como espacio métrico se llama un *espacio de Banach*.

Sucesión de Cauchy. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E, d) cumple la condición de Cauchy o que es una sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Se dice que (E, d) es un espacio métrico *completo* si toda sucesión de puntos de E que verifica la condición de Cauchy es convergente.

Un espacio normado que es completo como espacio métrico se llama un *espacio de Banach*.

Sea (E, d) un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de E. Si el conjunto de números reales:

$$C = \{\mathrm{d}(x, y) : x \in A, y \in A\}$$

está mayorado, se dice que A está *acotado*, en cuyo caso el número $\sup(C)$ se llama *diámetro* de A.

Sucesión de Cauchy. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (E,d) cumple la condición de Cauchy o que es una sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Se dice que (E,d) es un espacio métrico *completo* si toda sucesión de puntos de E que verifica la condición de Cauchy es convergente.

Un espacio normado que es completo como espacio métrico se llama un *espacio de Banach*.

Sea (E,d) un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de E. Si el conjunto de números reales:

$$C = \{\mathrm{d}(x,y) : x \in A, y \in A\}$$

está mayorado, se dice que A está *acotado*, en cuyo caso el número $\sup(C)$ se llama *diámetro* de A.
Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Teorema de Bolzano – Weierstrass en $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$. Toda sucesión acotada de puntos de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente en $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$.

Teorema de Bolzano – Weierstrass en $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Toda sucesión acotada de puntos de $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente en $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$.

Teorema de Hausdorff. Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

Teorema de Bolzano – Weierstrass en $(\mathbb{R}^n, \| \, \|_2)$. Toda sucesión acotada de puntos de $(\mathbb{R}^n, \| \, \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente en $(\mathbb{R}^n, \| \, \|_2)$.

Teorema de Hausdorff. Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

En todo espacio normado de dimensión finita la convergencia de una sucesión de puntos equivale a la convergencia por coordenadas.

Teorema de Bolzano – Weierstrass en $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$. Toda sucesión acotada de puntos de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente en $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$.

Teorema de Hausdorff. Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

En todo espacio normado de dimensión finita la convergencia de una sucesión de puntos equivale a la convergencia por coordenadas.

Las sucesiones de Cauchy y las sucesiones acotadas en un espacio normado de dimensión finita son las mismas para todas las normas.

Teorema de Bolzano – Weierstrass en $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Toda sucesión acotada de puntos de $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente en $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$.

Teorema de Hausdorff. Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

En todo espacio normado de dimensión finita la convergencia de una sucesión de puntos equivale a la convergencia por coordenadas.

Las sucesiones de Cauchy y las sucesiones acotadas en un espacio normado de dimensión finita son las mismas para todas las normas.

Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.

Teorema de Bolzano – Weierstrass en $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$. Toda sucesión acotada de puntos de $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente en $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$.

Teorema de Hausdorff. Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

En todo espacio normado de dimensión finita la convergencia de una sucesión de puntos equivale a la convergencia por coordenadas.

Las sucesiones de Cauchy y las sucesiones acotadas en un espacio normado de dimensión finita son las mismas para todas las normas.

Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.

Teorema de Bolzano–Weierstrass. Toda sucesión acotada de puntos de un espacio normado de dimensión finita tiene alguna sucesión parcial convergente.

Un subconjunto K de un espacio métrico se dice que es **compacto** si toda sucesión de puntos de K tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de K.

Un subconjunto K de un espacio métrico se dice que es **compacto** si toda sucesión de puntos de K tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de K.

Todo conjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado.

Un subconjunto K de un espacio métrico se dice que es **compacto** si toda sucesión de puntos de K tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de K.

Todo conjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado.

Caracterización de la compacidad en dimensión finita. Los conjuntos compactos en un espacio normado de dimensión finita son los conjuntos cerrados y acotados.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$. Se dice que f es continua en un punto $\alpha \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $\mathrm{d}(x, \alpha) < \delta$ se verifica que $\rho(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$. Se dice que f es continua en un punto $\alpha \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $\mathrm{d}(x, \alpha) < \delta$ se verifica que $\rho(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$.

Si f es continua en todos los puntos de un conjunto $B \subset A$ se dice que f es continua en B. Si f es continua en A se dice simplemente que f es continua.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$. Se dice que f es continua en un punto $\alpha \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $\mathrm{d}(x, \alpha) < \delta$ se verifica que $\rho(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$.

Si f es continua en todos los puntos de un conjunto $B \subset A$ se dice que f es continua en B. Si f es continua en A se dice simplemente que f es continua.

Caracterización secuencial de la continuidad. Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$. Se dice que f es continua en un punto $\alpha \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $\mathrm{d}(x, \alpha) < \delta$ se verifica que $\rho(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$.

Si f es continua en todos los puntos de un conjunto $B \subset A$ se dice que f es continua en B. Si f es continua en A se dice simplemente que f es continua.

Caracterización secuencial de la continuidad. Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:
a) f es continua en α.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$. Se dice que f es continua en un punto $\alpha \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $\mathrm{d}(x, \alpha) < \delta$ se verifica que $\rho(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$.

Si f es continua en todos los puntos de un conjunto $B \subset A$ se dice que f es continua en B. Si f es continua en A se dice simplemente que f es continua.

Caracterización secuencial de la continuidad. Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:
a) f es continua en α.
b) Para toda sucesión $\{x_n\} \to \alpha$ con $x_n \in A$ se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(\alpha)$.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$ y $f : A \to F$. Se dice que f es continua en un punto $\alpha \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $\mathrm{d}(x,\alpha) < \delta$ se verifica que $\rho(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$.

Si f es continua en todos los puntos de un conjunto $B \subset A$ se dice que f es continua en B. Si f es continua en A se dice simplemente que f es continua.

Caracterización secuencial de la continuidad. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:
a) f es continua en α.
b) Para toda sucesión $\{x_n\} \to \alpha$ con $x_n \in A$ se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(\alpha)$.
Como el concepto de sucesión convergente es topológico, del resultado anterior se sigue que la continuidad es una propiedad topológica.

Carácter local de la continuidad. Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha, r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B = B(\alpha, r) \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

Carácter local de la continuidad. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha,r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B=B(\alpha,r)\cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U\subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Carácter local de la continuidad. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha, r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B = B(\alpha, r) \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U \subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Caracterización topológica de la continuidad. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos y $f : E \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Carácter local de la continuidad. Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha, r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B = B(\alpha, r) \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U \subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Caracterización topológica de la continuidad. Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos y $f : E \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en E.

Carácter local de la continuidad. Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha, r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B = B(\alpha, r) \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U \subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Caracterización topológica de la continuidad. Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos y $f : E \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en E.
b) La imagen inversa por f de todo abierto de F es un abierto de E.

Carácter local de la continuidad. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha, r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B = B(\alpha, r) \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U \subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Caracterización topológica de la continuidad. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos y $f : E \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en E.
b) La imagen inversa por f de todo abierto de F es un abierto de E.
c) La imagen inversa por f de todo cerrado de F es un cerrado de E.

Carácter local de la continuidad. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha, r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B = B(\alpha, r) \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U \subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Caracterización topológica de la continuidad. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos y $f : E \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en E.
b) La imagen inversa por f de todo abierto de F es un abierto de E.
c) La imagen inversa por f de todo cerrado de F es un cerrado de E.

Carácter local de la continuidad. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha, r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B = B(\alpha, r) \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U \subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Caracterización topológica de la continuidad. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos y $f : E \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en E.
b) La imagen inversa por f de todo abierto de F es un abierto de E.
c) La imagen inversa por f de todo cerrado de F es un cerrado de E.

Sea (E,d) un espacio métrico y $f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica que:

Carácter local de la continuidad. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha,r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B=B(\alpha,r)\cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U\subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Caracterización topológica de la continuidad. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos y $f:E\to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en E.
b) La imagen inversa por f de todo abierto de F es un abierto de E.
c) La imagen inversa por f de todo cerrado de F es un cerrado de E.

Sea (E,d) un espacio métrico y $f:E\to\mathbb{R}$ una aplicación continua. Entonces para todo $t\in\mathbb{R}$ se verifica que:

a) Los conjuntos $\{x\in E: f(x)<t\}$ y $\{x\in E: f(x)>t\}$ son abiertos en E.

Carácter local de la continuidad. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha, r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B = B(\alpha, r) \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en α.

En particular, si $U \subset A$ es un conjunto abierto y $f_{|U}$ es continua, entonces f es continua en U.

Caracterización topológica de la continuidad. Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos y $f : E \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en E.
b) La imagen inversa por f de todo abierto de F es un abierto de E.
c) La imagen inversa por f de todo cerrado de F es un cerrado de E.

Sea (E,d) un espacio métrico y $f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica que:

a) Los conjuntos $\{x \in E : f(x) < t\}$ y $\{x \in E : f(x) > t\}$ son abiertos en E.
b) Los conjuntos $\{x \in E : f(x) \leqslant t\}$, $\{x \in E : f(x) \geqslant t\}$ y $\{x \in E : f(x) = t\}$ son cerrados en E.

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

a) d y ρ son distancias equivalentes.

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

a) d y ρ son distancias equivalentes.

b) Las aplicaciones identidad entre los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) son continuas.

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

a) d y ρ son distancias equivalentes.

b) Las aplicaciones identidad entre los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) son continuas.

c) Los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) tienen las mismas sucesiones convergentes.

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

a) d y ρ son distancias equivalentes.

b) Las aplicaciones identidad entre los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) son continuas.

c) Los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) tienen las mismas sucesiones convergentes.

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

a) d y ρ son distancias equivalentes.
b) Las aplicaciones identidad entre los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) son continuas.
c) Los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) tienen las mismas sucesiones convergentes.

Subespacio métrico.

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

a) d y ρ son distancias equivalentes.
b) Las aplicaciones identidad entre los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) son continuas.
c) Los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) tienen las mismas sucesiones convergentes.

Subespacio métrico.
Todo subconjunto no vacío de un espacio métrico (E, d) ***se considera automáticamente como subespacio métrico***.

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

a) d y ρ son distancias equivalentes.
b) Las aplicaciones identidad entre los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) son continuas.
c) Los espacios métricos (E, d) y (E, ρ) tienen las mismas sucesiones convergentes.

Subespacio métrico.
Todo subconjunto no vacío de un espacio métrico (E, d) ***se considera automáticamente como subespacio métrico***.

Todo espacio métrico se considera como espacio topológico con la topología asociada a la distancia, por tanto, **todo subconjunto no vacío** A **de un espacio métrico** (E, d) **también se considera como espacio topológico con la topología que tiene como subespacio métrico** (A, d).

Sean d y ρ dos distancias en un conjunto no vacío E. Equivalen las afirmaciones siguientes:

a) d y ρ son distancias equivalentes.
b) Las aplicaciones identidad entre los espacios métricos (E,d) y (E,ρ) son continuas.
c) Los espacios métricos (E,d) y (E,ρ) tienen las mismas sucesiones convergentes.

Subespacio métrico.
Todo subconjunto no vacío de un espacio métrico (E,d) ***se considera automáticamente como subespacio métrico***.

Todo espacio métrico se considera como espacio topológico con la topología asociada a la distancia, por tanto, **todo subconjunto no vacío** A **de un espacio métrico** (E,d) **también se considera como espacio topológico con la topología que tiene como subespacio métrico** (A,d).
Los abiertos en esta topología se llaman *abiertos relativos* y los cerrados se llaman *cerrados relativos* de A.

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A,d) son de la forma:

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A, d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A, d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A, d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. Se verifica que:

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A, d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. Se verifica que:

a) Los abiertos relativos de A son las intersecciones de los abiertos de E con A.

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A, d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. Se verifica que:

a) Los abiertos relativos de A son las intersecciones de los abiertos de E con A.
b) Los cerrados relativos de A son las intersecciones de los cerrados de E con A.

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A,d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. Se verifica que:

a) Los abiertos relativos de A son las intersecciones de los abiertos de E con A.
b) Los cerrados relativos de A son las intersecciones de los cerrados de E con A.

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a\in A$ en (A,d) son de la forma:

$$B_A(a,r)=\{x\in A : d(x,a)<r\}=\{x\in E : d(x,a)<r\}\cap A=B(a,r)\cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. Se verifica que:

a) Los abiertos relativos de A son las intersecciones de los abiertos de E con A.
b) Los cerrados relativos de A son las intersecciones de los cerrados de E con A.

Sean E y F espacios métricos, $\emptyset\neq A\subset E$ y $f : A\to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A, d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. Se verifica que:

a) Los abiertos relativos de A son las intersecciones de los abiertos de E con A.
b) Los cerrados relativos de A son las intersecciones de los cerrados de E con A.

Sean E y F espacios métricos, $\emptyset \neq A \subset E$ y $f : A \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en A.

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A, d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. Se verifica que:

a) Los abiertos relativos de A son las intersecciones de los abiertos de E con A.
b) Los cerrados relativos de A son las intersecciones de los cerrados de E con A.

Sean E y F espacios métricos, $\varnothing \neq A \subset E$ y $f : A \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en A.
b) La imagen inversa por f de todo abierto de F es un abierto relativo de A.

Teniendo en cuenta que las bolas abiertas, $B_A(a,r)$, de un punto $a \in A$ en (A,d) son de la forma:

$$B_A(a,r) = \{x \in A : d(x,a) < r\} = \{x \in E : d(x,a) < r\} \cap A = B(a,r) \cap A$$

es fácil describir los abiertos y los cerrados relativos de A.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E. Se verifica que:

a) Los abiertos relativos de A son las intersecciones de los abiertos de E con A.
b) Los cerrados relativos de A son las intersecciones de los cerrados de E con A.

Sean E y F espacios métricos, $\emptyset \neq A \subset E$ y $f : A \to F$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en A.
b) La imagen inversa por f de todo abierto de F es un abierto relativo de A.
c) La imagen inversa por f de todo cerrado de F es un cerrado relativo de A.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f:A\to F$ una función definida en A. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \ \exists\delta\in\mathbb{R}^+\ :\ \left.\begin{array}{c}\mathrm{d}(x,y)\leqslant\delta\\ x,y\in A\end{array}\right\}\Longrightarrow\rho(f(x),f(y))\leqslant\varepsilon$$

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$ una función definida en A. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left. \begin{array}{c} \mathrm{d}(x,y) \leqslant \delta \\ x,y \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow \rho(f(x),f(y)) \leqslant \varepsilon$$

- El concepto de “continuidad uniforme” es un concepto global: depende del comportamiento de la función en todo un conjunto. No tiene sentido decir que una función es uniformemente continua en un punto: la continuidad uniforme no es un concepto local.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f:A\to F$ una función definida en A. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+ \;\; \exists\delta\in\mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} \mathrm{d}(x,y)\leqslant\delta \\ x,y\in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \rho(f(x),f(y))\leqslant\varepsilon$$

- El concepto de “continuidad uniforme” es un concepto global: depende del comportamiento de la función en todo un conjunto. No tiene sentido decir que una función es uniformemente continua en un punto: la continuidad uniforme no es un concepto local.
- Toda función uniformemente continua en un conjunto es continua en dicho conjunto.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f:A\to F$ una función definida en A. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \ \exists\delta\in\mathbb{R}^+\ :\ \left.\begin{array}{c}\mathrm{d}(x,y)\leqslant\delta\\ x,y\in A\end{array}\right\}\Longrightarrow\rho(f(x),f(y))\leqslant\varepsilon$$

- El concepto de “continuidad uniforme” es un concepto global: depende del comportamiento de la función en todo un conjunto. No tiene sentido decir que una función es uniformemente continua en un punto: la continuidad uniforme no es un concepto local.
- Toda función uniformemente continua en un conjunto es continua en dicho conjunto.

Teorema de Heine. Toda función continua en un conjunto compacto K de un espacio métrico con valores en un espacio métrico es uniformemente continua en K.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$ una función definida en A. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} \mathrm{d}(x, y) \leqslant \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$$

- El concepto de "continuidad uniforme" es un concepto global: depende del comportamiento de la función en todo un conjunto. No tiene sentido decir que una función es uniformemente continua en un punto: la continuidad uniforme no es un concepto local.
- Toda función uniformemente continua en un conjunto es continua en dicho conjunto.

Teorema de Heine. Toda función continua en un conjunto compacto K de un espacio métrico con valores en un espacio métrico es uniformemente continua en K.

Se dice que un espacio normado es *localmente compacto* si las bolas cerradas son compactos.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$ una función definida en A. Se dice que f es *uniformemente continua* en A si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} \mathrm{d}(x, y) \leqslant \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$$

- El concepto de “continuidad uniforme” es un concepto global: depende del comportamiento de la función en todo un conjunto. No tiene sentido decir que una función es uniformemente continua en un punto: la continuidad uniforme no es un concepto local.
- Toda función uniformemente continua en un conjunto es continua en dicho conjunto.

Teorema de Heine. Toda función continua en un conjunto compacto K de un espacio métrico con valores en un espacio métrico es uniformemente continua en K.

Se dice que un espacio normado es *localmente compacto* si las bolas cerradas son compactos.

Teorema de Riesz, 1918. Un espacio normado es de dimensión finita si, y sólo si, es localmente compacto.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant M \mathrm{d}(x, y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant M\mathrm{d}(x, y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Si $M < 1$ se dice que f es una *aplicación contractiva*. Cualquier $M > 0$ que satisfaga la desigualdad anterior se llama una *constante de Lipschitz* para f.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x),f(y)) \leqslant M\mathrm{d}(x,y) \qquad \forall x,y \in A.$$

Si $M < 1$ se dice que f es una *aplicación contractiva*. Cualquier $M > 0$ que satisfaga la desigualdad anterior se llama una *constante de Lipschitz* para f.

Las funciones lipchicianas son uniformemente continuas.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant M\mathrm{d}(x, y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Si $M < 1$ se dice que f es una *aplicación contractiva*. Cualquier $M > 0$ que satisfaga la desigualdad anterior se llama una *constante de Lipschitz* para f.

Las funciones lipchicianas son uniformemente continuas.

Sean $(E, \| \|)$, $(F, ||| \, |||)$ espacios normados y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) T es continua.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant M\mathrm{d}(x,y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Si $M < 1$ se dice que f es una *aplicación contractiva*. Cualquier $M > 0$ que satisfaga la desigualdad anterior se llama una *constante de Lipschitz* para f.

Las funciones lipchicianas son uniformemente continuas.

Sean $(E,\|\ \|)$, $(F,|||\ |||)$ espacios normados y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) T es continua.

b) T es continua en $\mathbf{0}$.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant M\mathrm{d}(x,y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Si $M < 1$ se dice que f es una *aplicación contractiva*. Cualquier $M > 0$ que satisfaga la desigualdad anterior se llama una *constante de Lipschitz* para f.

Las funciones lipchicianas son uniformemente continuas.

Sean $(E, \|\ \|)$, $(F, |||\ |||)$ espacios normados y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) T es continua.

b) T es continua en $\mathbf{0}$.

c) Existe $M > 0$ tal que $|||T(\mathbf{x})||| \leqslant M\|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in E$.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f:A\to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M>0$ tal que

$$\rho(f(x),f(y))\leqslant M\mathrm{d}(x,y) \qquad \forall x,y\in A.$$

Si $M<1$ se dice que f es una *aplicación contractiva*. Cualquier $M>0$ que satisfaga la desigualdad anterior se llama una *constante de Lipschitz* para f.

Las funciones lipchicianas son uniformemente continuas.

Sean $(E,\|\ \|)$, $(F,|||\ |||)$ espacios normados y $T:E\to F$ una aplicación lineal. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) T es continua.
b) T es continua en $\mathbf{0}$.
c) Existe $M>0$ tal que $|||T(\mathbf{x})|||\leqslant M\|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x}\in E$.
d) T es lipchiciana.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant M\mathrm{d}(x, y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Si $M < 1$ se dice que f es una *aplicación contractiva*. Cualquier $M > 0$ que satisfaga la desigualdad anterior se llama una *constante de Lipschitz* para f.

Las funciones lipchicianas son uniformemente continuas.

Sean $(E, \|\ \|)$, $(F, |||\ |||)$ espacios normados y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) T es continua.

b) T es continua en $\mathbf{0}$.

c) Existe $M > 0$ tal que $|||T(\mathbf{x})||| \leqslant M\|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in E$.

d) T es lipchiciana.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, A un subconjunto no vacío de E y $f : A \to F$. Se dice que f es *lipchiciana* si existe $M > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant M\mathrm{d}(x, y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Si $M < 1$ se dice que f es una *aplicación contractiva*. Cualquier $M > 0$ que satisfaga la desigualdad anterior se llama una *constante de Lipschitz* para f.

Las funciones lipchicianas son uniformemente continuas.

Sean $(E, \| \|)$, $(F, ||| \, |||)$ espacios normados y $T : E \to F$ una aplicación lineal. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) T es continua.
b) T es continua en $\mathbf{0}$.
c) Existe $M > 0$ tal que $|||T(\mathbf{x})||| \leqslant M\|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in E$.
d) T es lipchiciana.

Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.

Campos escalares.
Operaciones con campos escalares.
Funciones racionales de varias variables.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Se dice que f tiene límite en α si hay un elemento $\ell\in F$ con la propiedad siguiente:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \iff \left[\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \ \exists\delta\in\mathbb{R}^+\ :\ \left.\begin{array}{c} 0<\mathrm{d}(x,\alpha)<\delta \\ x\in A \end{array}\right\}\Longrightarrow \rho(f(x),\ell)<\varepsilon\right]$$

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A'$. Se dice que f tiene límite en α si hay un elemento $\ell \in F$ con la propiedad siguiente:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} 0 < \mathrm{d}(x,\alpha) < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \rho(f(x),\ell) < \varepsilon \right]$$

Es fácil comprobar que solamente puede haber un elemento $\ell \in F$ que cumpla la condición anterior. Se dice que ℓ es el límite de f en el punto α y escribimos $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A'$. Se dice que f tiene límite en α si hay un elemento $\ell \in F$ con la propiedad siguiente:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} 0 < \mathrm{d}(x, \alpha) < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow \rho(f(x), \ell) < \varepsilon \right]$$

Es fácil comprobar que solamente puede haber un elemento $\ell \in F$ que cumpla la condición anterior. Se dice que ℓ es el límite de f en el punto α y escribimos $\displaystyle\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

Una notación mejor para el límite sería $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in A}} f(x) = \ell$ para indicar que solamente se consideran valores de la variable $x \in A$.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A'$. Se dice que f tiene límite en α si hay un elemento $\ell \in F$ con la propiedad siguiente:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \;:\; \left.\begin{array}{c} 0 < \mathrm{d}(x,\alpha) < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \rho(f(x),\ell) < \varepsilon\right]$$

Es fácil comprobar que solamente puede haber un elemento $\ell \in F$ que cumpla la condición anterior. Se dice que ℓ es el límite de f en el punto α y escribimos $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

Una notación mejor para el límite sería $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x\in A}} f(x) = \ell$ para indicar que solamente se consideran valores de la variable $x \in A$.

Observa que en la definición se supone que $\alpha \in A'$ es un punto de acumulación de A. Esto asegura que para todo $\delta > 0$, hay puntos $x \in A$ que cumplen la condición $0 < \mathrm{d}(x,\alpha) < \delta$. Por otra parte, puede ocurrir que $\alpha \notin A$, en cuyo caso f puede no estar definida en α.

Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A'$. Se dice que f tiene límite en α si hay un elemento $\ell \in F$ con la propiedad siguiente:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell \iff \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left. \begin{array}{c} 0 < \mathrm{d}(x, \alpha) < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow \rho(f(x), \ell) < \varepsilon \right]$$

Es fácil comprobar que solamente puede haber un elemento $\ell \in F$ que cumpla la condición anterior. Se dice que ℓ es el límite de f en el punto α y escribimos $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

Una notación mejor para el límite sería $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x \in A}} f(x) = \ell$ para indicar que solamente se consideran valores de la variable $x \in A$.

Observa que en la definición se supone que $\alpha \in A'$ es un punto de acumulación de A. Esto asegura que para todo $\delta > 0$, hay puntos $x \in A$ que cumplen la condición $0 < \mathrm{d}(x, \alpha) < \delta$. Por otra parte, puede ocurrir que $\alpha \notin A$, en cuyo caso f puede no estar definida en α.

La condición $0 < \mathrm{d}(x, \alpha) < \delta$ es una forma de escribir $x \neq \alpha$ y $\mathrm{d}(x, \alpha) < \varepsilon$. Es decir, en la definición de límite no interviene para nada, en el caso de que f esté definida en α, el valor que f pueda tener en α.

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon) \ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta) : \left.\begin{array}{c} x \in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta) \cap A \\ x \neq \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \in B_\rho(\ell,\varepsilon) \right]$$

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon) \;\; \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta) : \left. \begin{array}{c} x \in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta) \cap A \\ x \neq \alpha \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x) \in B_\rho(\ell,\varepsilon) \right]$$

En lo anterior puede sustituirse “bolas abiertas centradas en α o en ℓ” por “abiertos que contengan a α o a ℓ”. Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta) : \left. \begin{array}{c} x \in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x \neq \alpha \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x) \in B_\rho(\ell,\varepsilon) \right]$$

En lo anterior puede sustituirse "bolas abiertas centradas en α o en ℓ" por "abiertos que contengan a α o a ℓ". Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f : A \to F$ y $\alpha \in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta):\ \left.\begin{array}{c} x\in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x\neq\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)\in B_\rho(\ell,\varepsilon)\right]$$

En lo anterior puede sustituirse “bolas abiertas centradas en α o en ℓ” por “abiertos que contengan a α o a ℓ”. Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$.

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta): \left.\begin{array}{c} x\in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x\neq\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)\in B_\rho(\ell,\varepsilon)\right]$$

En lo anterior puede sustituirse “bolas abiertas centradas en α o en ℓ” por “abiertos que contengan a α o a ℓ”. Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$, que converge a α, $\{x_n\}\xrightarrow{\mathrm{d}}\alpha$, se verifica que $\{f(x_n)\}\xrightarrow{\rho}\ell$.

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta) : \begin{array}{c} x\in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x\neq\alpha \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x)\in B_\rho(\ell,\varepsilon) \right]$$

En lo anterior puede sustituirse "bolas abiertas centradas en α o en ℓ" por "abiertos que contengan a α o a ℓ". Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$, que converge a α, $\{x_n\}\xrightarrow{\mathrm{d}}\alpha$, se verifica que $\{f(x_n)\}\xrightarrow{\rho}\ell$.

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta): \left.\begin{array}{c} x\in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x\neq\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)\in B_\rho(\ell,\varepsilon)\right]$$

En lo anterior puede sustituirse “bolas abiertas centradas en α o en ℓ” por “abiertos que contengan a α o a ℓ”. Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$, que converge a α, $\{x_n\}\overset{\mathrm{d}}{\to}\alpha$, se verifica que $\{f(x_n)\}\overset{\rho}{\to}\ell$.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A\cap A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta):\ \left.\begin{array}{c} x\in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x\neq\alpha \end{array}\right\}\Longrightarrow f(x)\in B_\rho(\ell,\varepsilon)\right]$$

En lo anterior puede sustituirse “bolas abiertas centradas en α o en ℓ” por “abiertos que contengan a α o a ℓ”. Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$, que converge a α, $\{x_n\}\xrightarrow{\mathrm{d}}\alpha$, se verifica que $\{f(x_n)\}\xrightarrow{\rho}\ell$.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A\cap A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en α.

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta):\ \left.\begin{array}{c} x\in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x\neq\alpha \end{array}\right\}\Longrightarrow f(x)\in B_\rho(\ell,\varepsilon)\right]$$

En lo anterior puede sustituirse “bolas abiertas centradas en α o en ℓ” por “abiertos que contengan a α o a ℓ”. Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$, que converge a α, $\{x_n\}\overset{\mathrm{d}}{\to}\alpha$, se verifica que $\{f(x_n)\}\overset{\rho}{\to}\ell$.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A\cap A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en α.

b) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$.

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta): \left.\begin{array}{c} x\in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x\neq\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)\in B_\rho(\ell,\varepsilon)\right]$$

En lo anterior puede sustituirse “bolas abiertas centradas en α o en ℓ” por “abiertos que contengan a α o a ℓ”. Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$, que converge a α, $\{x_n\}\overset{\mathrm{d}}{\to}\alpha$, se verifica que $\{f(x_n)\}\overset{\rho}{\to}\ell$.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A\cap A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en α.

b) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$.

Podemos escribir la definición de límite usando bolas abiertas:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \left[\forall B_\rho(\ell,\varepsilon)\ \exists B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta): \left.\begin{array}{c} x\in B_{\mathrm{d}}(\alpha,\delta)\cap A \\ x\neq\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)\in B_\rho(\ell,\varepsilon)\right]$$

En lo anterior puede sustituirse “bolas abiertas centradas en α o en ℓ” por “abiertos que contengan a α o a ℓ”. Es decir, *el concepto de límite de una función en un punto es un concepto topológico*.

Caracterización secuencial del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A distintos de α, $x_n\in A\setminus\{\alpha\}$, que converge a α, $\{x_n\}\xrightarrow{\mathrm{d}}\alpha$, se verifica que $\{f(x_n)\}\xrightarrow{\rho}\ell$.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A\cap A'$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en α.

b) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$.

Carácter local del límite funcional. Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $A\subset E$, $f:A\to F$ y $\alpha\in A'$. Supongamos que hay alguna bola abierta $B(\alpha,r)$ tal que la restricción $f_{|B}$ de f al conjunto $B=B(\alpha,r)\cap A$ tiene límite en α igual a ℓ. Entonces f también tiene límite en α igual a ℓ.

Componentes de una función vectorial. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial. Para cada $\mathbf{x} \in A$ se tiene que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es un vector de $\mathbb{R}^m$. Para $1 \leqslant k \leqslant m$ definamos $f_k = \pi_k \circ \mathbf{F} : A \to \mathbb{R}$ donde π_k es la proyección coordenada k-ésima. Las funciones f_k así definidas son campos escalares que se llaman *componentes* de $\mathbf{F}$. Para cada $\mathbf{x} \in A$ se tiene que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k$$

donde $\{\mathbf{u}_k : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Componentes de una función vectorial. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial. Para cada $\mathbf{x} \in A$ se tiene que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es un vector de $\mathbb{R}^m$. Para $1 \leqslant k \leqslant m$ definamos $f_k = \pi_k \circ \mathbf{F} : A \to \mathbb{R}$ donde π_k es la proyección coordenada k-ésima. Las funciones f_k así definidas son campos escalares que se llaman *componentes* de $\mathbf{F}$. Para cada $\mathbf{x} \in A$ se tiene que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k$$

donde $\{\mathbf{u}_k : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Escribiremos $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ para indicar que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyos campos escalares componentes son los f_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$.

Componentes de una función vectorial. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial. Para cada $\mathbf{x} \in A$ se tiene que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es un vector de $\mathbb{R}^m$. Para $1 \leqslant k \leqslant m$ definamos $f_k = \pi_k \circ \mathbf{F} : A \to \mathbb{R}$ donde π_k es la proyección coordenada k-ésima. Las funciones f_k así definidas son campos escalares que se llaman *componentes* de $\mathbf{F}$. Para cada $\mathbf{x} \in A$ se tiene que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k$$

donde $\{\mathbf{u}_k : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Escribiremos $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ para indicar que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyos campos escalares componentes son los f_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$.

Sea $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial de n variables. Se verifica que:

- $\mathbf{F}$ es continuo en un punto $\boldsymbol{\alpha} \in A$ si, y sólo si, todos los campos escalares f_k son continuos en $\boldsymbol{\alpha}$.

Componentes de una función vectorial. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial. Para cada $\mathbf{x} \in A$ se tiene que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es un vector de $\mathbb{R}^m$. Para $1 \leqslant k \leqslant m$ definamos $f_k = \pi_k \circ \mathbf{F} : A \to \mathbb{R}$ donde π_k es la proyección coordenada k-ésima. Las funciones f_k así definidas son campos escalares que se llaman *componentes* de $\mathbf{F}$. Para cada $\mathbf{x} \in A$ se tiene que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k$$

donde $\{\mathbf{u}_k : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Escribiremos $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ para indicar que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyos campos escalares componentes son los f_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$.

Sea $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial de n variables. Se verifica que:

- $\mathbf{F}$ es continuo en un punto $\boldsymbol{\alpha} \in A$ si, y sólo si, todos los campos escalares f_k son continuos en $\boldsymbol{\alpha}$.
- $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta} \iff \lim_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}} f_k(\mathbf{x}) = \beta_k \quad (1 \leqslant k \leqslant m).$

- Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\alpha} \in A'$. Se dice que f es positivamente divergente en $\boldsymbol{\alpha}$ si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in A$ con $0 < \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta$ se verifica que $|f(\mathbf{x})| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x}) = +\infty$.

- Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\alpha} \in A'$. Se dice que f es positivamente divergente en $\boldsymbol{\alpha}$ si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in A$ con $0 < \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta$ se verifica que $|f(\mathbf{x})| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim_{\mathbf{x} \to \boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x}) = +\infty$.
- Se dice que f es negativamente divergente en $\boldsymbol{\alpha}$ si $-f$ es positivamente divergente en $\boldsymbol{\alpha}$, en cuyo caso escribimos $\lim_{\mathbf{x} \to \boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x}) = -\infty$.

- Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\alpha} \in A'$. Se dice que f es positivamente divergente en $\boldsymbol{\alpha}$ si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in A$ con $0 < \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta$ se verifica que $|f(\mathbf{x})| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim_{\mathbf{x} \to \boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x}) = +\infty$.
- Se dice que f es negativamente divergente en $\boldsymbol{\alpha}$ si $-f$ es positivamente divergente en $\boldsymbol{\alpha}$, en cuyo caso escribimos $\lim_{\mathbf{x} \to \boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x}) = -\infty$.
- Se dice que f es divergente en $\boldsymbol{\alpha}$ si $|f|$ es positivamente divergente en $\boldsymbol{\alpha}$, en cuyo caso escribimos $\lim_{\mathbf{x} \to \boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x}) = \infty$.

Si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x})=\ell$ entonces para todo conjunto $B\subset A$ con $\boldsymbol{\alpha}\in B'$ también se verifica que $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x})=\ell$.

Si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x})=\ell$ entonces para todo conjunto $B\subset A$ con $\boldsymbol{\alpha}\in B'$ también se verifica que $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x})=\ell$.
En particular, si $B=\{\boldsymbol{\alpha}+t\mathbf{u}:t\in\mathbb{R}\}\cap A$, entonces se tiene que:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x})=\lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha}+t\mathbf{u})$$

Este límite se llama *límite de f* en $\boldsymbol{\alpha}$ *según la dirección dada por el vector* $\mathbf{u}$.

Si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$ entonces para todo conjunto $B \subset A$ con $\boldsymbol{\alpha} \in B'$ también se verifica que $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x}) = \ell$.
En particular, si $B = \{\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\} \cap A$, entonces se tiene que:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u})$$

Este límite se llama *límite de f en $\boldsymbol{\alpha}$ según la dirección dada por el vector $\mathbf{u}$*.
Según acabamos de decir, si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$ entonces también debe ser $\lim\limits_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u}) = \ell$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$.

Si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$ entonces para todo conjunto $B \subset A$ con $\boldsymbol{\alpha} \in B'$ también se verifica que $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x}) = \ell$.
En particular, si $B = \{\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\} \cap A$, entonces se tiene que:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u})$$

Este límite se llama *límite de f en $\boldsymbol{\alpha}$ según la dirección dada por el vector $\mathbf{u}$*.
Según acabamos de decir, si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$ entonces también debe ser $\lim\limits_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u}) = \ell$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$.

Podemos generalizar considerando en vez de una recta que pasa por $\boldsymbol{\alpha}$ otro tipo de curvas que pasan por $\boldsymbol{\alpha}$, por ejemplo, parábolas $\gamma(t) = (t, \lambda t^2)$ o $\gamma(t) = (\lambda t^2, t)$.

Si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$ entonces para todo conjunto $B \subset A$ con $\boldsymbol{\alpha} \in B'$ también se verifica que $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x}) = \ell$.
En particular, si $B = \{\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\} \cap A$, entonces se tiene que:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u})$$

Este límite se llama *límite de f en $\boldsymbol{\alpha}$ según la dirección dada por el vector $\mathbf{u}$*.
Según acabamos de decir, si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$ entonces también debe ser $\lim\limits_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u}) = \ell$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$.

Podemos generalizar considerando en vez de una recta que pasa por $\boldsymbol{\alpha}$ otro tipo de curvas que pasan por $\boldsymbol{\alpha}$, por ejemplo, parábolas $\gamma(t) = (t, \lambda t^2)$ o $\gamma(t) = (\lambda t^2, t)$.
En general, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva que pasa por $\boldsymbol{\alpha}$, $\gamma(0) = \boldsymbol{\alpha}$, el límite $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t))$ se llama *límite de f en $\boldsymbol{\alpha}$ a lo largo de la curva γ*.

Si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x})=\ell$ entonces para todo conjunto $B\subset A$ con $\boldsymbol{\alpha}\in B'$ también se verifica que $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x})=\ell$.
En particular, si $B=\{\boldsymbol{\alpha}+t\mathbf{u}:t\in\mathbb{R}\}\cap A$, entonces se tiene que:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in B}} f(\mathbf{x})=\lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha}+t\mathbf{u})$$

Este límite se llama *límite de f en $\boldsymbol{\alpha}$ según la dirección dada por el vector $\mathbf{u}$*.
Según acabamos de decir, si existe $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{x}\in A}} f(\mathbf{x})=\ell$ entonces también debe ser $\lim\limits_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha}+t\mathbf{u})=\ell$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$.

Podemos generalizar considerando en vez de una recta que pasa por $\boldsymbol{\alpha}$ otro tipo de curvas que pasan por $\boldsymbol{\alpha}$, por ejemplo, parábolas $\gamma(t)=(t,\lambda t^2)$ o $\gamma(t)=(\lambda t^2,t)$.
En general, si $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ es una curva que pasa por $\boldsymbol{\alpha}$, $\gamma(0)=\boldsymbol{\alpha}$, el límite $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t))$ se llama *límite de f en $\boldsymbol{\alpha}$ a lo largo de la curva γ*.
Si existe el límite de f en $\boldsymbol{\alpha}$ entonces existe el límite de f a lo largo de toda curva que pasa por $\boldsymbol{\alpha}$ y todos ellos coinciden con el valor del límite.

Puesto que un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea es de la forma $\mathbf{u} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, y $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$, suelen escribirse los límites direccionales en la forma:

$$\lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u}) = \lim_{t\to 0} f(a + t\cos\vartheta, b + t\operatorname{sen}\vartheta)$$

Puesto que un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea es de la forma $\mathbf{u} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, y $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$, suelen escribirse los límites direccionales en la forma:

$$\lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u}) = \lim_{t\to 0} f(a + t\cos\vartheta, b + t\operatorname{sen}\vartheta)$$

Es frecuente escribir una recta que pasa por (a, b) en la forma $\gamma(t) = (a + t, b + \lambda t)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo – la pendiente de la recta – en cuyo caso los límites direccionales en (a, b) vienen dados por:

$$\lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t)$$

Puesto que un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea es de la forma $\mathbf{u} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, y $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$, suelen escribirse los límites direccionales en la forma:

$$\lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u}) = \lim_{t\to 0} f(a + t\cos\vartheta, b + t\operatorname{sen}\vartheta)$$

Es frecuente escribir una recta que pasa por (a, b) en la forma $\gamma(t) = (a + t, b + \lambda t)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo – la pendiente de la recta – en cuyo caso los límites direccionales en (a, b) vienen dados por:

$$\lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t)$$

Cuando $(a, b) = (0, 0)$ las rectas por el origen suelen representarse en la forma $\gamma(t) = (t, \lambda t)$ o $\gamma(t) = (\lambda t, t)$ donde λ es un parámetro fijo.

Puesto que un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea es de la forma $\mathbf{u} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, y $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$, suelen escribirse los límites direccionales en la forma:

$$\lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u}) = \lim_{t\to 0} f(a + t\cos\vartheta, b + t\operatorname{sen}\vartheta)$$

Es frecuente escribir una recta que pasa por (a, b) en la forma $\gamma(t) = (a + t, b + \lambda t)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo – la pendiente de la recta – en cuyo caso los límites direccionales en (a, b) vienen dados por:

$$\lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t)$$

Cuando $(a, b) = (0, 0)$ las rectas por el origen suelen representarse en la forma $\gamma(t) = (t, \lambda t)$ o $\gamma(t) = (\lambda t, t)$ donde λ es un parámetro fijo.
Con frecuencia es más cómodo estudiar los límites en $(0, 0)$. Esto puede hacerse siempre mediante una traslación pues:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x + a, y + b)$$

Puesto que un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea es de la forma $\mathbf{u} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, y $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$, suelen escribirse los límites direccionales en la forma:

$$\lim_{t\to 0} f(\boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u}) = \lim_{t\to 0} f(a + t\cos\vartheta, b + t\operatorname{sen}\vartheta)$$

Es frecuente escribir una recta que pasa por (a, b) en la forma $\gamma(t) = (a + t, b + \lambda t)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo – la pendiente de la recta – en cuyo caso los límites direccionales en (a, b) vienen dados por:

$$\lim_{t\to 0} f(a + t, b + \lambda t)$$

Cuando $(a, b) = (0, 0)$ las rectas por el origen suelen representarse en la forma $\gamma(t) = (t, \lambda t)$ o $\gamma(t) = (\lambda t, t)$ donde λ es un parámetro fijo.
Con frecuencia es más cómodo estudiar los límites en $(0, 0)$. Esto puede hacerse siempre mediante una traslación pues:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x + a, y + b)$$

Hay que observar que la existencia de todos los límites direccionales en un punto siendo, además, todos ellos iguales, no garantiza la existencia del límite en dicho punto.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A = I \times J \setminus \{(0,0)\}$ siendo I, J intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que contienen al 0. Supongamos que para todo $x \in I \setminus \{0\}$ existe $\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$. Tal límite dependerá en general del valor fijado de $x \in I \setminus \{0\}$. Definimos:

$$G : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad G(x) = \lim_{y \to 0} f(x,y)$$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A = I \times J \setminus \{(0,0)\}$ siendo I, J intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que contienen al 0. Supongamos que para todo $x \in I \setminus \{0\}$ existe $\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$. Tal límite dependerá en general del valor fijado de $x \in I \setminus \{0\}$. Definimos:

$$G : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad G(x) = \lim_{y \to 0} f(x,y)$$

Si la función G tiene límite en 0 dicho límite se llama un *límite iterado* de f en $(0,0)$ y se representa por:

$$\lim_{x \to 0} G(x) = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x,y) \right)$$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A = I \times J \setminus \{(0,0)\}$ siendo I, J intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que contienen al 0. Supongamos que para todo $x \in I \setminus \{0\}$ existe $\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$. Tal límite dependerá en general del valor fijado de $x \in I \setminus \{0\}$. Definimos:

$$G : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad G(x) = \lim_{y \to 0} f(x,y)$$

Si la función G tiene límite en 0 dicho límite se llama un *límite iterado* de f en $(0,0)$ y se representa por:

$$\lim_{x \to 0} G(x) = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x,y) \right)$$

Si para todo $y \in J \setminus \{0\}$ existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)$, podemos definir la función:

$$H : J \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad H(y) = \lim_{x \to 0} f(x,y)$$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A = I \times J \setminus \{(0,0)\}$ siendo I, J intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que contienen al 0. Supongamos que para todo $x \in I \setminus \{0\}$ existe $\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$. Tal límite dependerá en general del valor fijado de $x \in I \setminus \{0\}$. Definimos:

$$G : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad G(x) = \lim_{y \to 0} f(x,y)$$

Si la función G tiene límite en 0 dicho límite se llama un *límite iterado* de f en $(0,0)$ y se representa por:

$$\lim_{x \to 0} G(x) = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x,y) \right)$$

Si para todo $y \in J \setminus \{0\}$ existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)$, podemos definir la función:

$$H : J \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad H(y) = \lim_{x \to 0} f(x,y)$$

Si la función H tiene límite en 0 dicho límite se llama un *límite iterado* de f en $(0,0)$ y se representa por:

$$\lim_{y \to 0} H(y) = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x,y) \right)$$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A = I \times J \setminus \{(0,0)\}$ siendo I, J intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que contienen al 0. Supongamos que para todo $x \in I \setminus \{0\}$ existe $\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$. Tal límite dependerá en general del valor fijado de $x \in I \setminus \{0\}$. Definimos:

$$G : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad G(x) = \lim_{y \to 0} f(x,y)$$

Si la función G tiene límite en 0 dicho límite se llama un *límite iterado* de f en $(0,0)$ y se representa por:

$$\lim_{x \to 0} G(x) = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x,y) \right)$$

Si para todo $y \in J \setminus \{0\}$ existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)$, podemos definir la función:

$$H : J \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad H(y) = \lim_{x \to 0} f(x,y)$$

Si la función H tiene límite en 0 dicho límite se llama un *límite iterado* de f en $(0,0)$ y se representa por:

$$\lim_{y \to 0} H(y) = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x,y) \right)$$

Los límites iterados pueden no existir incluso aunque exista el límite de f en $(0,0)$.

En la situación que estamos considerando, supongamos que:

En la situación que estamos considerando, supongamos que:

- Los dos límites iterados existen y son distintos.

En la situación que estamos considerando, supongamos que:

- Los dos límites iterados existen y son distintos.
- La función G existe pero no existe el límite de G en 0.

En la situación que estamos considerando, supongamos que:

- Los dos límites iterados existen y son distintos.
- La función G existe pero no existe el límite de G en 0.
- La función H existe pero no existe el límite de H en 0.

En la situación que estamos considerando, supongamos que:

- Los dos límites iterados existen y son distintos.
- La función G existe pero no existe el límite de G en 0.
- La función H existe pero no existe el límite de H en 0.

En la situación que estamos considerando, supongamos que:

- Los dos límites iterados existen y son distintos.
- La función G existe pero no existe el límite de G en 0.
- La función H existe pero no existe el límite de H en 0.

Entonces no existe el límite de f en $(0, 0)$.

En la situación que estamos considerando, supongamos que:

- Los dos límites iterados existen y son distintos.
- La función G existe pero no existe el límite de G en 0.
- La función H existe pero no existe el límite de H en 0.

Entonces no existe el límite de f en $(0, 0)$.

Si existe solamente uno de los límites iterados o bien ambos y coinciden, entonces el límite de f en $(0, 0)$ puede no existir, pero si existe es igual al valor de dicho límite iterado.

En la situación que estamos considerando, supongamos que:

- Los dos límites iterados existen y son distintos.
- La función G existe pero no existe el límite de G en 0.
- La función H existe pero no existe el límite de H en 0.

Entonces no existe el límite de f en $(0,0)$.

Si existe solamente uno de los límites iterados o bien ambos y coinciden, entonces el límite de f en $(0,0)$ puede no existir, pero si existe es igual al valor de dicho límite iterado.

Límites en polares. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A = B_2((0,0),r) \setminus \{(0,0)\}$ y $B_2((0,0),r)$ es la bola euclídea abierta en $\mathbb{R}^2$ centrada en el origen de radio r. Definamos la función:

$$g :]0,r[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad g(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta)$$

y sea

$$G :]0,r[\to \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad G(\rho) = \sup\{g(\rho,\vartheta) : 0 \leqslant \vartheta < 2\pi\}$$

Entonces se verifica que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \iff \lim_{\rho\to 0} G(\rho) = \ell$$

Sea $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}$. Equivalen las afirmaciones:

Sea $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}$. Equivalen las afirmaciones:
a) C es un intervalo.

Sea $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}$. Equivalen las afirmaciones:
a) C es un intervalo.
b) Para toda función continua $f : C \to \mathbb{R}$ se verifica que $f(C)$ es un intervalo.

Sea $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}$. Equivalen las afirmaciones:
a) C es un intervalo.
b) Para toda función continua $f : C \to \mathbb{R}$ se verifica que $f(C)$ es un intervalo.

Sea E un espacio métrico y $\emptyset \neq C \subset E$ se dice que C es un conjunto *conexo* si para *toda* función continua $f : C \to \mathbb{R}$ se verifica que $f(C)$ es un intervalo.

Sea $\varnothing \neq C \subset \mathbb{R}$. Equivalen las afirmaciones:
a) C es un intervalo.
b) Para toda función continua $f : C \to \mathbb{R}$ se verifica que $f(C)$ es un intervalo.

Sea E un espacio métrico y $\varnothing \neq C \subset E$ se dice que C es un conjunto *conexo* si para *toda* función continua $f : C \to \mathbb{R}$ se verifica que $f(C)$ es un intervalo.

Un conjunto $\varnothing \neq C \subset E$ de un espacio métrico E es conexo si, y sólo si, la única partición de C por abiertos relativos es la trivial. Es decir, si A y B son abiertos relativos de C con $A \cap B = \varnothing$ y $C = A \cup B$ entonces el par $\{A, B\}$ ha de ser la partición trivial $\{A, B\} = \{\varnothing, C\}$.

Sea $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}$. Equivalen las afirmaciones:
a) C es un intervalo.
b) Para toda función continua $f : C \to \mathbb{R}$ se verifica que $f(C)$ es un intervalo.

Sea E un espacio métrico y $\emptyset \neq C \subset E$ se dice que C es un conjunto *conexo* si para *toda* función continua $f : C \to \mathbb{R}$ se verifica que $f(C)$ es un intervalo.

Un conjunto $\emptyset \neq C \subset E$ de un espacio métrico E es conexo si, y sólo si, la única partición de C por abiertos relativos es la trivial. Es decir, si A y B son abiertos relativos de C con $A \cap B = \emptyset$ y $C = A \cup B$ entonces el par $\{A, B\}$ ha de ser la partición trivial $\{A, B\} = \{\emptyset, C\}$.

Sean E y F espacios métrico, C un subconjunto conexo de E y $f : C \to F$ una función continua. Entonces se verifica que $f(C)$ es conexo.